Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matematica y C.C.

Guia Geometría Analítica 22103
Rectas-Circunferencias

Profesor: Rodrigo Pérez A.
Segundo Semestre 2008

1. Hallar los ángulos interiores del triángulo de vértices $(-2, 1)$, $(3, 4)$ y $(5, -2)$.
2. Demostrar que los puntos $(1, 1)$, $(5, 3)$, $(8, 0)$ y $(4, -2)$ son los vértices de un paralelógramo y hallar su ángulo obtuso.
3. Dos rectas se cortan formando un ángulo de $150°$, sabiendo que la recta final tiene pendiente -2, calcular la pendiente de la recta inicial.
4. Demostrar que los puntos $(2, 4)$, $(7, 3)$, $(6, -2)$ y $(1, -1)$ son vértices de un cuadrado y que sus diagonales son perpendiculares y se dividen mutuamente en partes iguales.
5. Demostrar que los puntos $(2, 2)$, $(5, 6)$, $(9, 9)$ y $(6, 5)$ son vértices de un rombo y que sus diagonales son perpendiculares y se cortan en su punto medio.
6. Hallar k_1, k_2 para que las dos ecuaciones $k_1x - 7y + 18 = 0$ y $8x - k_2y + 9k_1 = 0$ representen la misma recta.
7. Demostrar analíticamente los siguientes resultados:
   a) Un punto equdista de los extremos de un segmento si y sólo si pertenece a la simetral de este.
   b) Un punto equdista de los lados de un ángulo si y sólo si pertenece a la bisectriz de este.
   c) En un triángulo isósceles:
      1) La altura trazada desde el vértice dimidia a la base y bisecta al ángulo del vertice.
      2) La trasversal de gravedad correspondiente al vértice es perpendicular a la base y bisecta al ángulo del vértice.
      3) La bisectriz del ángulo del vertice dimidia a la base y es perpendicular a ella.
      4) Las alturas trazadas desde los vértices basales tienen la misma medida.

5) Las transversales de gravedad correpondientes a los vértices basales tiene la misma medida.

6) Las bisectrices basales son congruentes.

d) Los lados opuestos y los angulos opuestos de un paralelógramo son iguales.

e) Un cuadrilátero que tiene los lados respectivamente de la misma medida es un paralelogramo.

f) Un cuadrilátero que tiene un par de lados paralelos y congruentes es un palalelogramo.

g) Un cuadrilatero es un paralelógramo si y sólo si sus diagonales se dimidian.

h) Las diagonales de un cuadrado y un rombo son perpendiculares entre si y bisectan los ángulos de los vértices.

i) Los ángulos basales y las diagonales de un trapecio isósceles son iguales.

j) Cada mediana de un tríangulo es paralela al lado opuesto a ella e igual a la mitad de este lado.

k) La paralela media de dos rectas paralelas dimidia a todo segmento trazado entre las paralelas.

l) El segmento que une los puntos medios de los dos lados no paralelos de un trapecio (mediana) es paralelo a las bases e igual a su semisuma.

m) La paralela trazada por el punto medio de un lado a otro de un triángulo coincide con la mediana correspondiente.

n) La paralela a las bases de un trapecio trazada por el punto medio de uno de los lados no paralelos, coincide con la mediana del trapecio.

ñ) La suma de los cuadrados de las distancias de cualquier punto de un plano a dos vértices opuestos de cualquier rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de sus distancias a los otros dos vértices.

o) Si O,A,B, y C son los vértices sucesivos de un paralelógramo, y D, E los puntos medios de los lados AO y BC, respectivamente, los segmentos DB y OE trisecan a la diagonal.

8. Mostrar que los puntos $A(-5, 2)$, $B(1, 4)$ y $C(4, 5)$ son colineales.

9. Demostrar que la recta que pasa por los puntos $(4, -1)$ y $(7, 2)$ bisecta al segmento cuyos extremos son los puntos $(8, -3)$ y $(-4, -3)$.

10. Demostrar que las rectas $2x - y - 1 = 0$, $x + 5y - 22 = 0$, $2x - y - 16 = 0$ y $x - 8y + 7 = 0$ forman un cuadrado.

11. Si tres rectas se cortan en un punto común, se dice que son *concurrentes*. Mostrar que las tres rectas $3x - 5y + 7 = 0$, $2x + 3y - 8 = 0$ y $6x - 7y + 8 = 0$ son concurrentes.

12. Determinar el valor de k para que las tres rectas $8x + 3y - 1 = 0$, $3x + ky - 3 = 0$ y $x - 5y + 16 = 0$ sean concurrentes.

13. Demostrar analíticamente las siguientes propiedades:

    a) Las tres simetrales de los lados de un triángulo se intersectan en un mismo punto que equista de los tres vértices del triángulo (circuncentro).

    b) Las tres bisectrices de los ángulos de un triángulo se intersectan en un mismo punto que equista de los tres lados del triángulo (incentro).

    c) Las tres alturas de un triángulo se intersectan en un mismo punto (ortocentro).

    d) Las tres transversales de gravedad de los lados de un triángulo se intersectan en un mismo punto (baricentro o centro de gravedad).

    e) El centro de gravedad de un triángulo divide a cada transversal de gravedad en dos segmentos de modo que el segmento adyacente al vértice es el doble del segmento adyacente al lado.

14. Para el triángulo de vértices $(1, 1)$, $(4, 7)$ y $(6, 3)$, demostrar que el baricentro, el circuncentro y el ortocentro son colineales.

15. Demostrar analíticamente que baricentro, el circuncentro y el ortocentro de cualquier triángulo son colineales. La recta que los une se llama *recta de Euler*.

16. Desde el punto $(6, 0)$ se trazan perpendiculares a los lados $5x - y - 4 = 0$, $y = 1$ y $x - y = 4$ de un triángulo. Demostrar que los pies de estas perpendiculares son colineales.

17. Hallar la forma normal de la ecuación de la recta:

    a) Paralela a la recta $3x + 2y - 9 = 0$ y cuya distancia al origen es 8.

    b) Paralela a la recta $x - 5y + 11 = 0$ y que pasa por el punto $(-7, 2)$.

    c) Perpendicular a la recta $2x - 3y + 7 = 0$ y determina sobre el eje X el segmento -9.

18. Demostrar analíticamente que en un triángulo cualquiera la bisectriz de un ángulo interior y las bisectrices de los ángulos exteriores en los otros dos vértices son concurrentes.

19. Hallar el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que:

    a) Su distancia de la recta $4x - 3y + 12 = 0$ es igual a su distancia del eje Y.

    b) Su distancia de la recta $x + 2 = 0$ es igual a su distancia del punto $(2, 0)$.

    c) Su distancia de la recta $x - 2 = 0$ es siempre 3 unidades mayor que su distancia del punto $(-1, -3)$.

20. Sea un punto P variable, sobre el eje X, y dos puntos fijos $A(0,a)$ y $B(0,b)$ sobre el eje Y. Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de las perpendiculares a las recta PA y PB trazadas por A y B cuando el punto P recorre X.

21. Dos de los vértices de un triángulo son los puntos $A(1,0)$ y $B(5,0)$. Hallar la ecuación del tercer vértice C si se mueve de tal manera que la diferencia entre las longitudes de los lados AC y BC es siempre igual a su mitad de la longitud del lado AB.

22. Dos de los vértices de un triángulo son los puntos $A(-1,3)$ y $B(5,1)$. Hallar la ecuación del tercer vértice C si se mueve de tal manera que la pendiente del lado AC es siempre el doble de la pendiente del lado BC.

23. Hallar el área del trapecio formado por las rectas $3x-y-5=0$, $x-2y+5=0$, $x+3y-20=0$ y $x-2y=0$.

24. El ángulo de inclinación de cada una de dos rectas paralelas es α. si una de ellas pasa por el punto (a,b) y la otra por el punto (h,k), demostrar que que la distancia entre ellas es $|(h-a)\operatorname{sen}\alpha-(k-b)\cos\alpha|$.

25. Las ecuaciones de los lados de un triángulo son

$$y=ax-\frac{b\,c}{2}\,,\; y=bx-\frac{a\,c}{2}\,,\; y=cx-\frac{a\,b}{2}$$

Demostrar que el área es dada por $\frac{1}{8}|(a-b)(b-c)(c-a)|$.

26. Demostrar que el área del triángulo formado por el eje Y y las rectas $y=m_1x+b_1$ y $y=m_2x+b_2$ está dada por $\dfrac{1}{2}\dfrac{(b_2-b_1)^2}{|m_2-m_1|}$, $m_2\neq m_1$.

27. Hallar la circunferencia:

    a) De centro en el eje X y pasa por los puntos $(1,3)$ y $(4,6)$.

    b) Que pasa por los puntos $(0,0)$, $(3,6)$ y $(7,0)$.

    c) Que pasa por los puntos medios de los lados del triángulo de vértices $(-1,0)$, $(0,-2)$ y $(1,1)$.

28. Determinar la circunferencia:

    a) De centro $(0,-2)$ y que es tangente a la recta $5x-12y+2=0$.

    b) Que pasa por los puntos $(-3,3)$, $(1,4)$ y su centro está sobre la recta $3x-2y-23=0$.

    c) De radio $\sqrt{5}$ y es tangente a la recta $x-2y-1=0$ en el punto $(3,1)$.

d) De radio 1 y es tangente a la recta $3x - 4y - 1 = 0$ en el punto de ordenada 1.

e) Que pasa por los puntos $(1, 2)$, $(3, 4)$ y es tangente a la recta $3x + y - 3 = 0$.

29. Para los los siguientes pares de circunferencias: analizar la posición relativa, y cuando corresponda determinar su eje radical y el ángulo de intersección entre estas.

    a) $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 = 0$, $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 7 = 0$.

    b) $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 13 = 0$, $4x^2 + 4y^2 - 40x + 8y + 79 = 0$.

    c) $x^2 + y^2 - 3x + 6y + 10 = 0$, $x^2 + y^2 - 5 = 0$.

30. Determinar la circunferencia:

    a) Que pasa por la intersección de las circunferencias $x^2 + y^2 - 4x = 0$ y $x^2 + y^2 - x - 2y - 4 = 0$ y por el punto $(6, 4)$.

    b) Que pasa por la intersección de las circunferencias $x^2 + y^2 - 4x - 12y + 2 = 0$ y $x^2 + y^2 - 3x - 2y - 4 = 0$ y tiene su centro en el eje X.

31. Demostrar analíticamente:

    a) Las longitudes de dos tangentes trazadas a una circunferencia desde un punto exterior son iguales.

    b) Todo diámetro perpendicular a una cuerda la divide en dos partes iguales.

    c) Si por los extremos de un diámetro se trazan dos cuerdas paralelas, éstas son iguales.

    d) En dos circunferencias secantes la recta de los centros es perpendicular a su cuerda común en su punto medio.

32. Se han trazado dos tangentes a una circunferencia, paralelas entre sí, que cortan a una tercera tangente en los puntos A y B. Demostrar que las rectas que unen A y B con el centro son perpendiculares entre si.

33. Si desde los extremos de un diámetro de una circunferencia $\mathcal{C}$ se bajan las perpendiculares a una recta tangente a $\mathcal{C}$, probar que la suma de las medidas de los segmentos comprendidos entre la tangente y el diámetro es igual al doble del radio.

34. Proba que el diámetro de la circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo tiene como medida la diferencia entre las sumas de los catetos y la hipotenusa del triángulo.

35. Demostrar que si desde cualquier punto P de la circunferencia circunscrita a un triángulo, se bajan perpendiculares a los lados del triángulo, los pies de estas perpendiculares son colineales. La recta que determinan se llama *recta de Simpson para el punto* P.

36. Demostrar que el punto $P(7,3)$ está sobre la circunferencia circunscrita a al triángulo de vértices $(-1,-1)$, $(2,8)$, $(5,7)$ y hallar la ecuación de la recta de Simpson para el punto P.