



UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE  
 FACULTAD DE CIENCIA  
 DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y C.C.



**PROGRAMA DE ESTUDIOS INGENIERIA MATEMÁTICA**

**Carrera**

**INGENIERÍA MATEMÁTICA**

22027	Análisis II	T= 4 E= 2 L=0
Requisitos	Análisis I	
DICTA DEPARTAMENTO	Matemática y Ciencia de la Computación	
Autor	María Isabel Cortez	
Versión 2011	⋮	

**CAPACIDADES GENERALES DEL CURSO**

Al finalizar el curso, el alumno será capaz de:

1. Comprender el concepto de medida y espacio de medida.
2. Comprender y trabajar con la integral de Lebesgue.
3. Comprender y trabajar con medidas producto.
4. Trabajar con los espacios  $L^p$ .
5. Conocer aplicaciones de la Teoría de la medida.

**RESUMEN DE UNIDADES TEMÁTICAS (Teoría y Ejercicios)**

UNIDAD	TITULO	Nº HORAS
1	Espacios de medida.	17
2	Integración	17
3	Medidas producto	17
4	Espacios $L^p$	17
5	Aplicaciones	17
6		
TOTAL	SEMANAS	

## PRINCIPALES TEXTOS DE REFERENCIA:

- **Royden, H.L.-.** *Realt Analysis*. The Mac Millan Co., Toronto, 1968.
- **Hewitt, E. Stromberg K.** *Real and Abstrac Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1969.
- **Cohn D.L.,** *Measure Theory*, Birkaiser, Boston ,1980.
- **Shilov, G.** *The Mathematical Análisis*, Pergamon Press, Oxford, 1965.
- **Friedman, A** *Foundations of Modern Analysis*, Ed. Dover, 1982.
- **Wilcox H. and Myers D.,** *An Introduction to Lebesgue Integration and Fourier series*, Ed.Dover, 1994.
- **Rudin, W.** *Analisis Real y Complejo*, Ed. Alambra, 1979.
- **Taylor, M.E** *Measure theory and integration*, [Graduate Studies in Mathematics, 76](#). American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.
- **Doob, J.L.** *Measure theory*. [Graduate Texts in Mathematics, 143](#). Springer-Verlag, New York, 1994.
- **Lieb E, Loss M.** *Analysis*, [Graduate Studies in Mathematics, 14](#). American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- **San Martín, J.** *Apuntes de Teoría de la Medida*. Universidad de Chile, Departamento de Ingeniería Matemática, 1995.

## 1. UNIDAD TEMÁTICA UNO: Espacios de medida.

### CAPACIDADES A DESARROLLAR:

1. Comprender el concepto y propiedades de una medida (positiva).
2. Comprender los Teoremas de extensión de una medida.
3. Comprender la noción de espacio de medida, y de espacio de medida completo.
4. Comprender los conceptos de medida de Lebesgue-Stieltjes en  $\mathbb{R}$  y medida regular.

## CONTENIDOS

Estructuras importantes y nociones básicas de medida	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Definición de medida.</li> <li>• Sigma-álgebra, álgebra y semi-álgebra.</li> <li>• Sigma-álgebra y álgebra engendrada.</li> <li>• Sigma-álgebra de Borel en espacios topológicos.</li> </ul>
Propiedades de la medida	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Monotonía y sigma-subaditividad.</li> <li>• Continuidad superior e inferior.</li> <li>•</li> </ul>
Extensión de una medida	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Medida exterior.</li> <li>• Teorema de Caratheodory.</li> <li>• Medida sigma-finita.</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Teorema de Hahn.</li> <li>• Concepto de espacio de medida.</li> </ul>
Completitud de un espacio de medida	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Conjuntos despreciables.</li> <li>• Sigma-álgebra completa.</li> <li>• Completación de un espacio de medida.</li> </ul>
Medidas de Lebesgue-Stieltjes	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ejemplos de semi-álgebras engendrando a los Borelianos en <math>\mathbb{R}</math>.</li> <li>• Medidas de Lebesgue-Stieltjes sobre los Borelianos en <math>\mathbb{R}</math></li> <li>• Caso particular : medida de Lebesgue.</li> <li>• Sigma-álgebra de Lebesgue.</li> <li>• Existencia de un conjunto no Lebesgue medible.</li> <li>• Concepto de medida regular.</li> </ul>

### TÓPICOS A SER EVALUADOS

**Resolver problemas que involucren:**

1. Noción de sigma-álgebra, álgebra y semi-álgebra.
2. Definición axiomática de medida
3. Trabajar con medidas de Lebesgue,-Stieltjes.
4. Aplicar Teoremas de Caratheodory y Hahn.

### CAPACIDADES A DESARROLLAR:

1. Comprender el concepto de función medible.
2. Comprender el concepto de función simple.
3. Comprender el concepto de función integrable e integral de Lebesgue.
4. Comprender los teoremas de convergencia.

### CONTENIDOS

Funciones simples	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Funciones simples positivas.</li> <li>• Definición de integral para funciones simples positivas.</li> </ul>
Funciones medibles	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Espacios medibles y función medible entre dos espacios medibles.</li> <li>• Funciones medibles a valores en <math>\mathbb{R}^+</math> más <math>\infty</math> (espacio <math>M^+</math>).</li> <li>• Aproximación de funciones en <math>M^+</math> por funciones simples positivas.</li> </ul>

Funciones integrables	<ul style="list-style-type: none"> <li>Definición de integral de Lebesgue en <math>M^+</math> y propiedades.</li> <li>Definición de función integrable en <math>M</math> (medibles a valores en <math>\mathbb{R}</math> <math>+\epsilon, -\epsilon</math>) y de integral de Lebesgue.</li> <li>Concepto de propiedad que se satisface casi en todas partes, (c.t.p)</li> <li>Propiedades de la integral de Lebesgue.</li> </ul>
Teoremas de convergencia.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Convergencia Monótona.</li> <li>Lema de Fatou.</li> <li>Teorema de convergencia dominada (TCD).</li> <li>Teorema de convergencia dominada versión c.t.p.</li> </ul>
Integral de Riemann	<ul style="list-style-type: none"> <li>Funciones Riemann integrables sobre un intervalo.</li> <li>Integral de Riemann.</li> <li>Relación entre integrales de Riemann y Lebesgue.</li> </ul>

### TÓPICOS A SER EVALUADOS

#### Resolución de problemas que involucran:

Definición de integral.

Aplicación de los teoremas de convergencia.

### 3. UNIDAD TEMÁTICA TRES: Medidas producto.

#### CAPACIDADES A DESARROLLAR:

1. Comprender el concepto de espacio de medida producto.
2. Comprender el Teorema de Fubini.
3. Comprender la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$ .
4. Comprender el Teorema del cambio de variables.

#### CONTENIDOS

Medida Producto	<ul style="list-style-type: none"> <li>Producto de dos sigma-álgebras y sigma-álgebra producto. <ul style="list-style-type: none"> <li>Medida producto de dos medidas sigma-finitas.</li> <li>Medida de Lebesgue en <math>\mathbb{R}^n</math>.</li> </ul> </li> </ul>
-----------------	---

Teorema de Fubini	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Teorema de Fubini.</li> <li>• Aplicaciones.</li> </ul>
Teorema del cambio de variables en $\mathbb{R}^n$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Teorema del cambio de variables.</li> <li>• Aplicaciones.</li> </ul>

### TÓPICOS A SER EVALUADOS

#### Resolución de problemas que involucran:

1. Hipótesis del Teorema de Fubini.
2. Aplicaciones del Teorema de Fubini.
3. Aplicaciones del Teorema de cambio de variables.
4. Espacios productos abstractos.

### 4. UNIDAD TEMÁTICA CUATRO: Espacios $L^p$

#### CAPACIDADES A DESARROLLAR:

1. Comprender los Espacios  $L^p$  y sus propiedades.
2. Comprender
3. Comprender et Teorema de Radon-Nikodym.

#### CONTENIDOS

<b>4.1. Espacios <math>L^p</math></b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Definición de espacios <math>L^p</math> y <math>\ \cdot\ _p</math>.</li> <li>• <math>(L^1, \ \cdot\ _1)</math> espacio de Banach.</li> <li>• <math>(L^\infty, \ \cdot\ _\infty)</math> espacio de Banach.</li> <li>• Desigualdad de Holder.</li> <li>• <math>(L^p, \ \cdot\ _p)</math> Banach y <math>(L^2, \ \cdot\ _2)</math> Hilbert.</li> <li>• Convergencia en los espacios <math>L^p</math>.</li> </ul>
<b>4.2. Teorema de Radon-Nikodým</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Densidad de una medida.</li> <li>• Medidas absolutamente continuas.</li> <li>• Teorema de Radon-Nikodym.</li> <li>• Medidas singulares.</li> <li>• Teorema de descomposición de Lebesgue.</li> </ul>
<b>4.3. Dualidad de los</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dual de <math>L^p</math>, <math>1 &lt; p &lt; \infty</math>.</li> </ul>

espacios $L_p$ .	
------------------	--

### TÓPICOS A SER EVALUADOS

**Resolución de problemas que involucran:**

1. Espacios  $L_p$
2. Diferentes modos de convergencia de sucesión de funciones.
3. Medidas definidas a partir de una densidad.

### 5. UNIDAD TEMÁTICA CINCO: Aplicaciones

#### CAPACIDADES A DESARROLLAR:

1. Conocer alguna o varias aplicaciones de la Teoría de la medida .

#### CONTENIDOS (Elegir alguno)

<b>Aplicación a las probabilidades.</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Espacio y medida de probabilidad.</li> <li>• Variables aleatorias, distribución.</li> <li>• Independencia y propiedades.</li> <li>• Esperanza y propiedades.</li> <li>• Esperanza condicional y propiedades.</li> </ul>
<b>Transformada de Fourier.</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Convolución</li> <li>• Transformada de Fourier en <math>L_1</math> y propiedades.</li> <li>• Transformada de Fourier en <math>L_2</math> y propiedades.</li> </ul>
<b>Medidas de Radón</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Medidas de Radón.</li> <li>• Teorema de Riesz.</li> </ul>
<b>Teoría Ergódica</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Teorema Ergódico en espacios de Hilbert.</li> <li>• Teorema ergódico de Birkhoff.</li> </ul>

### TÓPICOS A SER EVALUADOS

**Resolución de problemas que involucran:**

- .Reconocer alguna de las aplicaciones.