

## PROGRAMA DE ASIGNATURA

|                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|----------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Nombre</b>                          | <b>Análisis Funcional</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <b>Carrera</b>                         | Ingeniería Matemática                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <b>Código</b>                          | 22169                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <b>Créditos SCT-Chile</b>              | <b>8 Sct</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | <i>Tbjo. Directo: 6 hrs. pedag. – Tbjo. Autónomo: 8 hrs. cronolog.</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| <b>Nivel</b>                           | 7mo semestre                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <b>Requisitos</b>                      | Teoría de la medida                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <b>Categoría</b>                       | Obligatorio                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <b>Área de conocimiento según OCDE</b> | Ciencias Naturales                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <b>Descripción</b>                     | <b>Contribución al Perfil de Egreso</b><br><br><b>El curso Análisis Funcional tributa a los siguientes desempeños integrales del perfil de egreso de Ingeniería Matemática</b><br><br><i>1-Desarrollar constructos matemáticos teóricos y prácticos para estudiar problemas que surgen del ámbito académico o profesional, utilizando herramientas matemáticas avanzadas y el pensamiento abstracto y/o estructurado.</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|                                        | <b>Resultado de aprendizaje general</b><br><br>Al finalizar el curso, el estudiante será capaz de entender y aplicar los conceptos fundamentales del análisis funcional, incluyendo espacios vectoriales normados, espacios de Banach y de Hilbert, y la teoría de operadores lineales. Será capaz de utilizar herramientas avanzadas como el teorema de Hahn-Banach, la reflexividad de espacios, y las propiedades de los operadores compactos y continuos, así como aplicar estos conceptos en la resolución de problemas en diversas áreas del análisis y la geometría. Además, desarrollará una comprensión profunda de las topologías débiles y espacios $L^p$ , lo que le permitirá abordar problemas en áreas como las ecuaciones en derivadas parciales y la teoría de distribuciones. |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|                                        | <b>Resultados de aprendizaje específicos</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | <b>Unidades temáticas</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|                                        | <ul style="list-style-type: none"> <li>Comprender los espacios vectoriales normados de dimensión infinita y trabajar con la noción de base en estos espacios.</li> <li>Analizar las transformaciones lineales en espacios vectoriales normados, identificando condiciones de continuidad y discontinuidad, especialmente en espacios de dimensión infinita.</li> <li>Estudiar el espacio de las transformaciones lineales acotadas, calculando su norma y aplicando conceptos de continuidad en este contexto.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                       | <b>Unidad N°1: Espacios vectoriales normados.</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Introducción a los espacios vectoriales normados de dimensión infinita: noción de base.</li> <li>Transformaciones lineales y continuidad: existencia de transformaciones lineales discontinuas en espacios de dimensión infinita.</li> <li>El espacio de las transformaciones lineales acotadas y su norma.</li> </ul> |

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Definir los espacios de Hilbert y comprender la igualdad del paralelogramo en estos espacios.</li> <li>• Estudiar los conceptos de proyección y ortogonalidad en espacios de Hilbert y aplicarlos en contextos específicos.</li> <li>• Comprender el dual de un espacio de Hilbert y aplicar el teorema de representación de Riesz para representar elementos en el dual.</li> <li>• Trabajar con bases ortonormales y entender su relación con las series de Fourier.</li> <li>• Analizar operadores compactos y estudiar la alternativa de Fredholm en espacios de Hilbert.</li> <li>• Aplicar el Teorema de Hilbert-Schmidt en el contexto de operadores compactos y en problemas prácticos relacionados.</li> </ul> | <b>Unidad N°2: Espacios de Hilbert.</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Definición de espacios de Hilbert.</li> <li>• Igualdad del paralelogramo</li> <li>• Nociones de proyección y ortogonalidad</li> <li>• Dual de un espacio de Hilbert, teorema de representación de Riesz.</li> <li>• Bases ortonormales Hilbertianas.</li> <li>• Series de Fourier</li> <li>• Operadores compactos.</li> <li>• Alternativa de Fredholm.</li> <li>• Teorema de Hilbert-Schmidt</li> </ul> |
|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|--|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Caracterizar los espacios de Banach mediante la convergencia de series y comprender sus propiedades fundamentales.</li> <li>• Estudiar el principio de la cota uniforme y su aplicación en el análisis de funciones en espacios de Banach.</li> <li>• Aplicar los teoremas de la aplicación abierta y gráfico cerrado en el contexto de espacios de Banach y sus implicaciones para la topología de estos espacios.</li> <li>• Entender la noción de dual de un espacio vectorial normado y trabajar con sus propiedades en el contexto de espacios de Banach.</li> <li>• Aplicar el Teorema de Hahn-Banach en sus versiones analítica y geométrica, comprendiendo su importancia en el análisis funcional y su relación con los espacios de Banach.</li> <li>• Estudiar el bidual de un espacio vectorial normado y comprender el concepto de reflexividad en espacios de Banach.</li> </ul> | <p><b>Unidad N°3: Espacios de Banach.</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Caracterización de espacios de Banach mediante convergencia de series.</li> <li>• Principio de la cota uniforme</li> <li>• Teoremas de la aplicación abierta y grafo cerrado.</li> <li>• Noción de dual de un espacio vectorial normado</li> <li>• Teorema de Hahn Banach analítico.</li> <li>• Teorema de Hahn Banach geométrico.</li> <li>• Bidual de un espacio vectorial normado y reflexividad</li> </ul> |
|  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Comprender la topología débil en un espacio vectorial normado y su relación con la estructura de estos espacios.</li> <li>• <i>Estudiar la topología débil- en el dual*</i> de un espacio topológico y cómo se aplica en el análisis funcional.</li> <li>• Aplicar el Teorema de Banach-Alaouglu para entender la compacidad en la topología débil en espacios de Banach.</li> <li>• Analizar la reflexividad en espacios topológicos, comprendiendo el Teorema de Kakutani y su importancia en este contexto.</li> <li>• Aplicar los conceptos de topología débil para estudiar subsecuencias convergentes de medidas de probabilidad en espacios compactos.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                      | <p><b>Unidad N°4: Topologías débiles.</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Noción de topología débil en un espacio vectorial normado.</li> <li>• Noción de topología débil-* en el dual de un espacio topológico.</li> <li>• Teorema de Banach-Alaouglu</li> <li>• Reflexividad: el teorema de Kakutani.</li> <li>• Tópico opcional<br/>Aplicaciones: subsecuencias convergentes de medidas de probabilidad en espacios compactos</li> </ul>                                              |

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|--|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Revisar los espacios <math>L^p</math> asociados a un espacio de medida y su caracterización como espacios de Banach.</li> <li>• Estudiar la separabilidad de los espacios <math>L^p</math> para <math>p</math> finito, y analizar contraejemplos en el caso de <math>p</math> infinito.</li> <li>• Comprender la reflexividad en los espacios <math>L^p</math> y aplicar el Teorema de Representación de Riesz en estos espacios, con un enfoque especial en los casos <math>p=1</math> y <math>p=\infty</math>.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | <b>Unidad N°5: Espacios <math>L^p</math>.</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Recordatorio de espacios <math>L^p</math> asociados a un espacio de medida como espacios de Banach.</li> <li>• Separabilidad de <math>L^p</math> para <math>p</math> finito. Contraejemplos en el caso de <math>p</math> infinito.</li> <li>• Reflexividad para espacios <math>L^p</math> junto a su Teorema de representación de Riesz. Estudio especial de los casos <math>p=1</math> y <math>p=\infty</math>.</li> </ul> |
|  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Estudiar álgebras de Banach y sus propiedades, así como su relación con los espacios de Banach y su aplicación en análisis funcional.</li> <li>• Comprender las medidas de Radón como dual de un espacio de funciones continuas y su importancia en la teoría de medidas.</li> <li>• Analizar el teorema ergódico de Von Neumann y su aplicación en espacios de Hilbert, comprendiendo sus implicaciones en la teoría ergódica.</li> <li>• Explorar los espacios de Schwartz y sus propiedades, en particular su relación con funciones de rápida decaimiento y su aplicación en análisis y transformadas.</li> <li>• Introducir la teoría de distribuciones, entendiendo su conexión con funciones generalizadas y su uso en el análisis de ecuaciones diferenciales.</li> <li>• Estudiar los espacios de Sobolev y su aplicación en el análisis funcional, especialmente en la introducción a las ecuaciones en derivadas parciales (EDP).</li> </ul> | <b>Unidad N°6: Tópicos adicionales.</b><br>Estudiar uno o más tópicos avanzados.<br><br>Por ejemplo, uno de los siguientes: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Álgebras de Banach.</li> <li>• Medidas de Radón como dual de un espacio de funciones continuas.</li> <li>• El teorema ergódico de Von Neumann como aplicación de propiedades de espacios de Hilbert.</li> <li>• Espacios de Schwartz.</li> <li>• Teoría de Distribuciones</li> <li>• Espacios de Sobolev e introducción a EDP.</li> </ul>     |
|  | <b>Metodologías de enseñanza y de aprendizaje</b><br><br>Clases expositivas.<br><br>En el tiempo de <b>trabajo autónomo</b> el/la estudiante deberá realizar tareas para reforzar el aprendizaje de la clase                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |

**Procedimientos de evaluación**

Se requerirá un mínimo de dos pruebas cuyo promedio debe valer al menos el 50% de la nota final del curso. El resto de las evaluaciones pueden consistir de exposiciones, tareas, etc.

**Bibliografía básica**

- Brezis, H. (2011). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer New York. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-70914-7>
- Conway, J. B. (2007). *A Course in Functional Analysis*. In *Graduate Texts in Mathematics*. Springer New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4383-8>
- Muscat, J. (2014). *Functional Analysis*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-06728-5>
- Reed, M y Simon, B. (1980) *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*, Academic Press.
- Stein, E. M., & Shakarchi, R. (2012). *Functional Analysis*. Princeton University Press. <https://doi.org/10.1515/9781400840557>

**Bibliografía avanzada:**

- Murray, J. (1990) *C\*-Algebras and Operator Theory*. Elsevier. <https://doi.org/10.1016/c2009-0-22289-6>
- Kerr, D., & Li, H. (2016). *Ergodic Theory*. In *Springer Monographs in Mathematics*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-49847-8>
- Evans, L. C. (2010) (1998). *Partial Differential Equations*. *Graduate Studies in Mathematics*. Vol. 19 (2nd ed.). American Mathematical Society. p. 749. ISBN 978-0-8218-4974-3.